

El pensamiento funcional. Un estudio en 7°

Nora Yamile Rojas
norayamile@yahoo.com
Universidad Pedagógica Nacional

Adalberto Martínez Ahumada
adamar2008@gmail.com
I. E. Alfonso López Pumarejo- Guaviare

Gloria García
aprendizajeyevaluacion@gmail.com
Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. La siguiente comunicación reporta un avance del análisis de diferentes investigaciones relacionadas con el pensamiento funcional que venimos realizando como parte de los antecedentes de investigación. El trabajo hace parte del proyecto de investigación: “Estudio del papel de los escenarios y ambientes de aprendizaje de las matemáticas en los procesos de inclusión en las clases” del grupo Didáctica de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, en la línea “aprendizaje y evaluación de las matemáticas”.

Palabras-clave. Educación Matemática Crítica, pensamiento funcional, visualización, escenarios de investigación y ambientes de aprendizaje.

1. Presentación del problema

En la mayoría de las clases de matemáticas prevalece lo que se ha denominado el ambiente tradicional para aprender matemáticas, el cual está dividido en dos partes. En la primera parte, el profesor presenta y explica contenidos de matemáticas escolares; en la segunda parte, los estudiantes trabajan en ejercicios o problemas, caracterizados como problemas escolares que a pesar de presentar una sola y única respuesta, los estudiantes muchas veces no encuentran justificación de la relevancia en participar para resolverlos. Este tipo de práctica es habitual en la clase de 7c¹. Esta práctica educativa en la mayoría de los casos trae como consecuencia que algunos estudiantes comiencen a presentar resistencias para aprender matemáticas y a prestar poco interés por la clase. Algunos estudiantes expresan abiertamente

¹ La clase 7C hace parte de los grupos que estudian en la sede principal de La institución educativa Alfonso López Pumarejo, la IEALP. Esta Institución, es un colegio anexo a la secretaría de educación departamental del Guaviare conformado por tres sedes ubicadas en la zona urbana de municipio de San José. La clase está conformada por 36 estudiantes, de los cuales 29 son niños y 7 son niñas, las edades oscilan entre los 12 y 16 años y comporta la característica particular de ser constituida sólo por estudiantes repitentes del año anterior pertenecientes a la institución.

su desinterés por aprender: – “*eso es difícil [contenido], yo no pude con eso el año pasado, y otra vez... que manera [pereza]*” – (comentario de una estudiante de la clase 7C).

De otra parte, García, Valero, Salazar, Romero, Camelo, Mancera, Gonzales (2010) plantean abordar desde la educación matemática crítica, el montaje de escenarios de aprendizaje en los que los estudiantes encuentren las razones para aprender matemáticas. Este estudio se enmarca en el proyecto de investigación desde el cual se busca:

Contribuir a brindar oportunidades para que los estudiantes de sexto y séptimo grado de la educación básica encuentren en ambientes de aprendizaje las razones para aprender matemáticas a partir de una propuesta de escenarios de aprendizaje desde el punto de vista de la educación matemática crítica (García et al., 2010).

La problemática que motiva la investigación se sitúa en tres ambientes de aprendizaje de las matemáticas en los grados sexto y séptimo de la educación básica. Las posibilidades de construir los escenarios de investigación desde el enfoque de la educación matemática crítica requieren relacionar los siguientes presupuestos:

- 1) Que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son prácticas sociales y políticas que se organizan en una red compleja que una multiplicidad de niveles dentro y fuera del aula. Tanto lo que sucede fuera del aula las influencia, al igual que ellas tienen un impacto en otras prácticas fuera del aula y la escuela (Valero, 2006; 2007).
- 2) A nivel individual, el aprendizaje es una acción que requiere que la persona tome la decisión de comprometerse con el aprendizaje. (Skovsmose, 1994).
- 3) La intención de aprender se relaciona con los antecedentes del estudiante y con su visión de las posibilidades de vida futura, es decir, su porvenir. (Skovsmose, 1994; 2005a).
- 4) El significado de la actividad educativa y de aprendizaje no depende necesariamente de los procesos de cognición internos en la mente del estudiante sino especialmente de la relación que el estudiante pueda hacer entre las actividades del aula, su mundo y en particular sus posibilidades futuras de vida. (Skovsmose, 2005b; Skovsmose et al., 2007). En otras palabras, el significado no es una variable solamente cognitiva sino también socio-política.

Según García et al. (2010), Relacionar estos presupuestos para una enseñanza de las matemáticas donde sea posible que los estudiantes tomen la decisión de comprometerse con el aprendizaje requiere, como lo señala Skovomose (1999), de organizar escenarios de enseñanza con problemas que tienen contenidos matemáticos importantes desde una perspectiva del contenido del aprendizaje, de la importancia sociológica de aprender matemáticas en la escuela, y de la posición misma de los niños. El montaje de un escenario puede hacerse desde tres formas diferentes: desde la aproximación realista, desde una atmósfera de fantasía y cuento y desde involucrar a los niños por medio del compromiso y la actividad (Skovsmose, 1999: 102).

Uno de los contenidos matemáticos importantes del aprendizaje escolar es el pensamiento funcional, no solo por la importancia que tiene como núcleo de contenido de las matemáticas escolares, sino porque está asociado a diversidad de prácticas sociales tanto de los entornos de los estudiantes como en la cultura y en el campo científico.

2. Referentes teóricos

Acerca de la educación Matemática Crítica. Una de las características principales de la clase de matemática de 7C, es que los niños no han encontrado una razón para el aprendizaje de las matemáticas que se relacione directamente con ellos, distinto al que se promueve en los corredores del colegio: – “la matemática hay que aprenderla porque es importante y sirve para lo que se va a trabajar el otro año” – (comentario de un profesor de la clase 7C). Por tal motivo, al tener en cuenta sólo los aspectos cognitivos de los estudiantes de la clase 7C, desconociendo sus antecedentes y expectativas futuras, este último denominado por Skovsmose (s.f) como su “porvenir”, toda acción del profesor con la intención de involucrar a los estudiantes en las clases y que se interesen por el aprendizaje tiende a fracasar. El enfoque de la Educación matemática crítica, plantea que los obstáculos de aprendizaje no solo se restringen a las dificultades cognitivas, sino que también intervienen otro tipo de obstáculos, como son los obstáculos políticos (Skovsmose, s.f). La dimensión política de los obstáculos de aprendizaje está relacionada con los procesos sociales de inclusión y exclusión en el aula de clase de matemáticas.

En los obstáculos políticos de aprendizaje se hace importante interpretar lo que los

estudiantes quieren para su futuro, de acuerdo con su consideración de porvenir y oportunidades en la vida, para poder entender las acciones de los niños y la forma en que se interesan y comprometen en su proceso educativo, específicamente en el aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, la resistencia de algunos niños a las clases, su ausentismo y poco interés por el aprendizaje se relaciona con los ambientes que generan el tipo de actividades que se proponen en el aula. Una serie de contenidos matemáticos que ya vieron (números enteros, operaciones con números enteros, valor absoluto, “ley de signos”, etc.), ejercicios de práctica (referidos a la destreza de los algoritmos) y problemas semirreales de situaciones alejadas a su cotidianidad, resultan poco atractivos y en ocasiones “difíciles” para los estudiantes, ocasionando que las condiciones de bajo rendimiento que caracteriza al grupo se manifieste en la mayoría de los niños y se genere el proceso de exclusión que han venido experimentando.

Según Skovsmose (2000), las actividades matemáticas pueden referirse a tres tipos de referencias: exclusivamente a las matemáticas, a una semirrealidad o a situaciones de la vida real, que combinados con las formas de organización de la actividad para los estudiantes que se inscriben en dos paradigmas de prácticas educativas en el salón de clase: el paradigma del ejercicio y el paradigma de los escenarios de investigación, generan seis tipos de ambientes de aprendizaje. El paradigma del ejercicio se relaciona con las prácticas matemáticas educativas tradicionales en las que los ejercicios que se resuelven son determinados por una autoridad externa a la clase, casi siempre esta autoridad reside en los textos escolares. Por su parte las prácticas que promueve el escenario de investigación se caracterizan por, en primer lugar por involucrar al estudiante en la actividad matemática y en segundo lugar por promover el trabajo investigativo colaborativo. Este enfoque de investigación, según el autor, está relacionado con la educación matemática crítica, puesto que la microsociedad de la clase se sustenta en principios de la democracia.

En ese sentido, las situaciones que los profesores de la clase 7C utilizan, se pueden ubicar en el paradigma del ejercicio con referencia a la matemática o una semirrealidad, cuando el profesor recurre a una situación artificial que es familiar para los estudiantes, pero que no es real. Además, estas situaciones pueden ser pensadas de manera espontánea sin una previa investigación empírica.

De otro lado, Skovsmose (2000) también considera otros elementos para especificar los ambientes de aprendizaje y establecer la cultura del aula de clase: la estratificación, aquella relacionada con el ordenamiento y clasificación de los estudiantes de acuerdo con sus habilidades y desempeños en el aula de clase. Las características del grupo de estudiantes de grado 7C se ajustan a esta condición de estratificación, puesto que el grupo se conformó de acuerdo a su bajo desempeño académico. Esta condición afecta el ambiente de la clase y no contribuye de manera positiva a la experimentación de los valores democráticos puesto que los estudiantes se sienten de alguna manera excluidos.

Una cuestión importante en los escenarios es establecer los tipos de referencias para combinar las distintas prácticas educativas en la clase de matemáticas que deben combinar los tipos de práctica educativa con las referencias mencionados en líneas anteriores. Skovsmose interpreta estas referencias como los motivos para las acciones de los estudiantes en el aula de clase (Skovsmose 2000, pag 9).

Un escenario de investigación, según Skovsmose (2000), involucra procesos de exploración y explicación, en los cuales se invita a los estudiantes a que formulen preguntas, busquen explicaciones y sean ellos los protagonistas de su propio aprendizaje. Sin embargo, la aceptación de los estudiantes a esta invitación depende de muchos factores, entre ellos la manera en la que el profesor presenta la invitación y la disposición de los estudiantes frente a la actividad. El escenario genera el ambiente y puede constituirse o no en un escenario de investigación dependiendo de la práctica educativa.

Acerca del pensamiento funcional. En relación con el estudio de dependencia entre variables René de Cotret (1985) y Ruiz(1993), cuyos aportes de investigación están relacionados con el análisis histórico-epistemológico y epistemológico-didáctico del concepto de función respectivamente, señalan que para potenciar el pensamiento funcional en estudiantes de secundaria, se debe iniciar desde el análisis de situaciones o fenómenos sujetos al cambio, en los cuales podemos evidenciar relaciones de dependencia entre las cantidades que varían. Estas relaciones de dependencia, a nivel histórico, se estudiaron hacia finales de la Edad Media donde se resalta la noción de variable dependiente (Nicolás Oresme, 1323-1382; Galileo Galilei, 1564-1642, quien introduce lo numérico, y Descartes, 1596-1650, con quien se alcanza la

noción de variable dependiente).

Sin embargo, ambas autoras encuentran algunos obstáculos de aprendizaje relacionados con ciertas concepciones del concepto de función con respecto al reconocimiento de esa dependencia y con la identificación de las cantidades variables. Por ejemplo, René De cotret encontró en su estudio sobre las representaciones gráficas del movimiento que los estudiantes de 12 a 15 años consideran la velocidad como una cualidad y no como una función distancia contra tiempo. Al respecto, Ruiz (1993) reportó en su estudio con estudiantes de secundaria de los cursos 2° y 3° de bachillerato y un curso de orientación universitaria, que la gráfica de una función en ningún caso representa la relación existente entre las variables; los estudiantes “No destacan el poder de la visualización que tiene el gráfico de las propiedades globales de la función” (P. 346).

Carrasco (2005) reportó algo similar en su tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, titulada “Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo”. Halló que los estudiantes de grado décimo presentan obstáculos para construir, interpretar y trabajar con gráficas de fenómenos de variación que requieren el tiempo como variable. Las miradas sobre el tiempo son principalmente cualitativas y subjetivas y no reconocen el tiempo como variable. Lo importante de esta investigación radica en el énfasis puesto en la visualización; el autor señala la importancia de la visualización como parte de la actividad matemática, reconociendo su existencia y valor desde los tiempos de Oresme (1320), Descartes (1600) y Newton (1642), quienes utilizaron estrategias geométricas para visualizar la variación.

Si bien estas investigaciones nos indican los obstáculos y las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo del pensamiento funcional y son útiles a la hora de diseñar un escenario de aprendizaje, otras investigaciones también nos aportan ideas no solo de lo que los estudiantes no son capaces de hacer sino de lo que los estudiantes son capaces de hacer en relación con este tipo de pensamiento.

En las últimas dos décadas numerosas investigaciones a nivel internacional han promovido la introducción de modos de pensamiento algebraico desde los primeros cursos en la escuela, en

un movimiento llamado Early-Algebra. Dentro de estos investigadores se encuentran Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Blanton y Kaput, 2004, 2005; Kaput, 1998, 2000; Brizuela y Schliemann, 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; entre otros (Molina, 2009).

Schliemann, Carraher y Brizuela (2000) en su investigación “*Cuando las tablas se vuelven tablas de funciones*” estudiaron las tablas de datos como tablas de funciones. Por medio de un estudio de clase, analizaron el cambio conceptual de los estudiantes al pasar de la identificación de patrones simples a la exploración de las relaciones funcionales implícitas entre dos variables. Se trabajó en una clase con 18 estudiantes de tercer grado de una escuela pública de Boston. Los autores usaron una secuencia de tareas partiendo de lo que ellos sabían de los vendedores de la calle y de las estrategias que utilizan los niños en la solución de problemas de precios, y encontraron que los estudiantes fueron capaces de pensar de manera funcional y hacer uso de la notación funcional. Dentro de la metodología se usaron diferentes tareas de complejidad creciente; las cuales se iniciaron con la petición de completar la siguiente tabla

Mary had a table with the prices for boxes of Girl Scout cookies. But it rained and some numbers were wiped out. Let's help Mary fill out her table:

Boxes of cookies	Price
	\$ 3.00
2	\$ 6.00
3	
	\$ 12.00
5	
6	
	\$ 21.00
8	
9	
10	\$ 30.00

Figura 1. Tomada de “*When tables become function*”

Schliemann, Carraher y Brizuela concluyen en su discusión que el juego de “adivinar la regla” ayuda a los estudiantes a romper con la idea de llenar cada columna de una tabla por separado.

Blanton y Kaput (2004), en su investigación acerca de “*la capacidad de pensamiento funcional para estudiantes de grados elementales*”, consideran que una de las formas de pensamiento

algebraico está involucrada con el pensamiento funcional. En su estudio acerca de la capacidad del pensamiento funcional en estudiantes de grados de primaria, citan a Smith (2003) quien sostiene que “the functional thinking” se describe como:

“El pensamiento de representación que se centra en la relación entre dos(o más) cantidades variables y para las cuales se denotan los sistemas de representación de funciones inventados o apropiados por los niños, para representar la generalización de una relación entre las cantidades” (Blanton & kaput, 2004, p.135)

Dentro de la metodología, se usó una tarea denominada “ojos y colas”. Ésta pretende desarrollar el pensamiento funcional entre cantidades arbitrarias de perros y su correspondencia con el número total de ojos y el número total de colas. “Los ojos y las colas” fueron seleccionados debido a su accesibilidad en todos los grados elementales, que permite buscar tendencias longitudinales en el pensamiento funcional de los estudiantes. Dentro de las preguntas propuestas en la tarea se encuentran las siguientes:

Si había un perro, cuántos ojos podían haber ¿Y si habían dos perros? Tres perros? 100 perros? ¿Ve usted una relación entre el número de perros y el número total de ojos? ¿Cómo describir esta relación? ¿Cómo lo sabes? Suponga que usted quiere saber cuántos ojos y cola juntos. ¿Cuántos ojos y colas hay para un perro? Dos perros? Tres perros? 100 perros? ¿Cómo describiría usted la relación entre el número de perros y el número total de ojos y cola? ¿Cómo sabes que esto funciona? (Blanton & Kaput, 2004, p.136)

En todos los grados los estudiantes utilizaron tablas, gráficos, imágenes, palabras y símbolos para expresar las relaciones matemáticas y dar sentido a la tarea propuesta. A medida que avanzan en el grado los estudiantes registran los datos sin la ayuda del profesor y necesitan menos datos para hacer sus predicciones. Kaput y Blanton resaltan que, aunque el estudio de patrones es algo que se ha hecho recientemente en el estudio del pensamiento algebraico en los grados elementales, no se ha hecho énfasis en el pensamiento funcional, puesto que se ha reducido la atención en buscar patrones simples en datos de una sola variable y no en la forma en la que dos o más cantidades varían en forma simultánea (dos variables o más) y esto puede convertirse en un obstáculo para el potencial desarrollo del pensamiento funcional en grados posteriores.

Kaput y Blanton (2005), exploran en su artículo “*Ayudar a los Maestros de Primaria a Construir la Generalización matemática dentro del Currículo y la instrucción*”, la manera en que los profesores de primaria pueden utilizar el pensamiento funcional para construir razonamiento algebraico en el currículo y la instrucción. Los profesores deben, según los

autores, transformar los recursos de base existentes en el aula en recursos que faciliten el estudio del pensamiento funcional en los niños. Sugiriendo, de esta manera, convertir tareas aritméticas de única respuesta a tareas para introducir el pensamiento funcional variando los parámetros dados. Los autores señalan la importancia de relacionar dos variables de diferente naturaleza para trabajar el pensamiento covariacional en los niños y de esta manera potenciar este tipo de pensamiento como una vía para el razonamiento algebraico en tareas en las cuales los estudiantes expresen de manera general las relaciones de dependencia entre dichas variables.

3. Conclusión

Las investigaciones revisadas nos aportan ideas relacionadas con los obstáculos epistemológicos y didácticos del pensamiento funcional. A su vez, las investigaciones llevadas a cabo en el marco del movimiento llamado Early-Algebra, nos confirman que podemos partir de lo que los estudiantes son capaces de hacer, en particular, con el estudio de las funciones desde muy temprana edad. De esta manera, para el estudio del pensamiento funcional en la clase de 7C debemos instaurar prácticas matemáticas educativas que lo apoyen tal como lo sugieren los autores; prácticas pedagógicas dialógicas e inclusivas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de la Educación Matemática Crítica.

4. Referencias bibliográficas

- Blanton, M & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 135–142.
- Blanton, M & Kaput, J. (2005). Helping Elementary Teachers Build Mathematical Generality into Curriculum and Instruction. *ZDM*, 37, (1), 34-42.
- Carrasco, E. (2005). Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo. Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional, México
- García G., Mancera G., Romero J., Camelo F. y Salazar C. (2009). Dilemas y tensiones que enmarcan el significado de competencia matemática: ¿soluciones de problemas en contextos reales? ¿Soluciones significativas para la vida social? ¿Formación para participar activamente en la vida democrática? En: *Revista Magisterio. Educación y pedagogía*. n° 39. Junio-julio.
- García G., Valero P., Salazar C., Romero J., Camelo F., Mancera G. y Gonzales M. (2010). Estudio del papel de los escenarios y ambientes de aprendizaje de las

- matemáticas en los procesos de inclusión en las clases. Proyecto de Investigación Científica. Bogotá: Colciencias.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- René de Cotret, S. (1985). Etude historique de la notion de fonction: analyse epistemologique et experimentation didactique. Memoire de maitrise en mathématiques. Montreal Université du Quebec.
- Ruiz, L. (1993). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Tesis doctoral, departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2000). When tables become function tables. Support for the research here reported was provided by NSF Grants #9722732 and #9909591. Recuperado el 03 de marzo de 2011, en http://didmat.dima.unige.it/miur/miur_dima/G/STORIA_DI_UNA_RICERCA/SC_HLIEMANN.PDF
- Skovsmose, O. (1994). Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6, (1), 3-20.
- Skovsmose, O. (2002). Porvenir y política de los obstáculos de aprendizaje. Recuperado el 24 de febrero de 2011, en http://www.unsan.edu.ar/escuelas/humanidades/esculea_invierno_2009_porvenir_Ole_Skovsmose.pdf
- Skovsmose, O. (2005a). Foregrounds and politics of learning obstacles. *For the Learning of Mathematics*, 25(1), 4-10.
- Skovsmose, O. (2005b). Travelling through education: Uncertainty, mathematics, responsibility. Rotterdam, NHL: Sense.
- Skovsmose, O., Alrø, H., Valero, P., in colaboración with Scanduzzi, P., & Silverio, A. (2007). "Before you divide, you have to add": Inter-viewing Indian students' foregrounds. In B. Sriraman (Ed.), *The Montana Mathematics Enthusiast. Monograph 1: International perspectives on social justice in mathematics education* (pp. 151-168). Missoula (USA): Department of Mathematical Sciences – The University of Montana.
- Valero, P. (2006) ¿De carne y hueso? La vida social y política de la competencia matemática. 2006. Año de las Competencias Matemáticas. Foro Educativo Nacional. 24, 25 y 26 de octubre de 2006.
- Valero, P. (2007). In between the global and the local: The politics of mathematics education reform in a globalized society. In B. Atweh, A. Calabrese Barton, M. Borba, N. Gough, C. Keitel, C. Vistro-Yu & R. Vithal (Eds.), *Internationalisation and globalization in mathematics and science education* (pp. 421-439). New York: Springer

Volver al índice
Comunicaciones Breves